Języki, automaty i obliczenia

Wykład 2: Automaty skończone

Sławomir Lasota

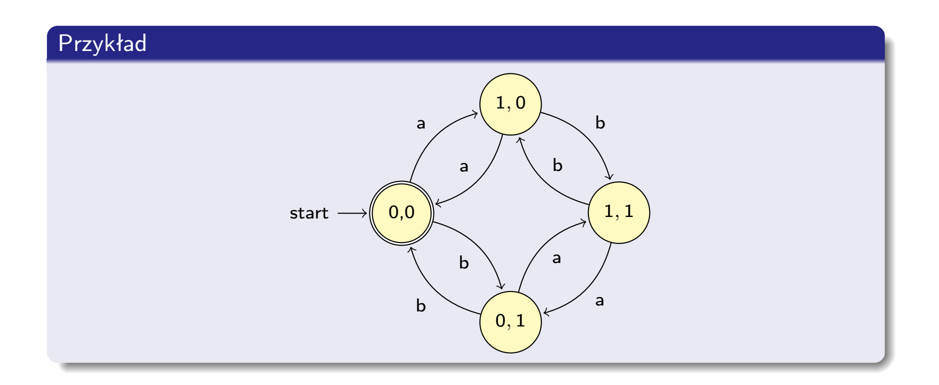
Uniwersytet Warszawski

4 marca 2015

Plan

Zamiast wyrażeń, automaty

$$L = (aa + bb + (ab + ba)(aa + bb)^*(ab + ba))^*$$



(Niedeterministyczny) automat skończony

$$\mathcal{A} = (A, Q, I, F, \delta)$$

- A – alfabet
- Q – skończony zbiór stanów
- $I \subseteq Q$ – stany początkowe
- $F \subseteq Q$ – stany akceptujące
- $\delta \subseteq Q \times A \times Q$ – relacja przejścia

Notacja

trójkę $(q, a, q') \in \delta$ nazywamy *przejściem*, albo *tranzycją*

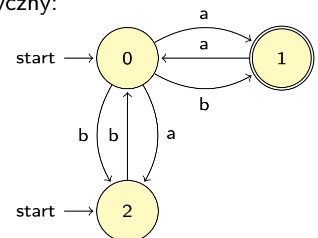
zamiast $(q, a, q') \in \delta$ możemy pisać $q \xrightarrow{a} q'$, albo $q \xrightarrow{a}_{\mathcal{A}} q'$

Automat jest *deterministyczny* jeśli

- δ jest funkcją $Q \times A \to Q$,
- I zawiera jeden stan, $I = \{q_0\}$.

- $A = \{a, b\}$
- $L = ?$

Automat niedeterministyczny:

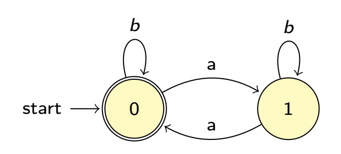


- $A = \{a, b\}$
- $Q = \{0, 1, 2\}$
- $I = \{0, 2\}$
- $F = \{1\}$
- $\delta = \{(0, a, 1), (0, b, 1), (0, a, 2), (0, b, 2), (1, a, 0), (2, b, 0)\}$

Przykład: automat deterministyczny

- $A = \{a, b\}$
- $L = b^*(ab^*ab^*)^*$

Automat deterministyczny:

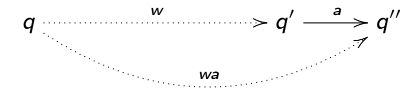


- $A = \{a, b\}$
- $Q = \{0, 1\}$
- $I = F = \{0\}$
- $\delta = \{(0, b, 0), (1, b, 1), (0, a, 1), (1, a, 0)\}$

Rozszerzona relacja przejścia

Rozszerzamy relację przejścia do relacji $\widehat{\delta} \subseteq Q \times A^* \times Q$:

- $\widehat{\delta}(q, \varepsilon, q)$
- jeśli $\widehat{\delta}(q, w, q')$ i $\delta(q', a, q'')$ to $\widehat{\delta}(q, wa, q'')$



Notacja

zamiast $(q, w, q') \in \widehat{\delta}$ możemy pisać $q \xrightarrow{w} q'$

Dla automatów deterministycznych:

$$\widehat{\delta} : Q \times A^* \to Q.$$

Więc stan po przeczytaniu słowa w jest *jednoznacznie* wyznaczony przez w:

$$\widehat{\delta}(q_0, w) \qquad\qquad I = \{q_0\}$$



Rozszerzona relacja przejścia

Stany osiągalne

$$\{q \in Q \ : \ \exists w \in A^*, q_0 \in I.\ \widehat{\delta}(q_0, w, q)\}$$

$$\{q \in Q \ : \ \exists w \in A^*, q_0 \in I.\ q_0 \xrightarrow{w}_{\mathcal{A}} q\}$$

$$\{q \in Q \ : \ \exists w \in A^*.\ I \xrightarrow{w}_{\mathcal{A}} q\}$$

Biegi

Bieg (obliczenie) automatu na słowie $w = a_1 a_2 \ldots a_n$:

$$(q_0, a_1, q_1)\ (q_1, a_2, q_2)\ \ldots\ (q_{n-1}, a_n, q_n) \qquad\qquad q_0 \in I$$

$$q_0 \xrightarrow{a_1} q_1 \xrightarrow{a_2} q_2\ \ldots\ q_{n-1} \xrightarrow{a_n} q_n$$

Bieg jest *akceptujący* jeśli $q_n \in F$.

Fakt

Automat deterministyczny ma dokładnie jeden bieg na każdym słowie.

Automat *akceptuje* słowo w jeśli ma przynajmniej jeden bieg akceptujący na słowie w.

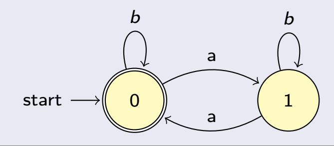
Język automatu

Język *rozpoznawany* przez automat:

- $L(\mathcal{A}) \stackrel{\text{def}}{=} \{w \in A^* \;:\; \exists q \in I, q' \in F.\ \widehat{\delta}(q, w, q')\}$
- $L(\mathcal{A}) \stackrel{\text{def}}{=} \{w \in A^* \;:\; \widehat{\delta}(I, w, F)\}$
- $L(\mathcal{A}) \stackrel{\text{def}}{=} \{w \in A^* \;:\; \mathcal{A} \text{ ma bieg akceptujący na } w\}$

Przykład

$L(\mathcal{A}) \;=\; b^*(ab^*ab^*)^*$

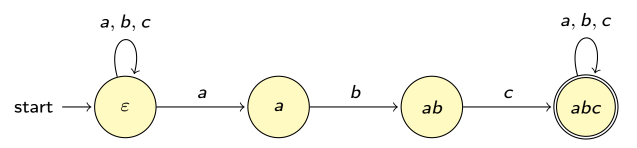


- $L(\mathcal{A}, q) \;=\; \ldots$

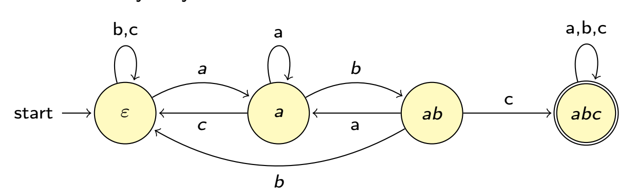
Przykład

- $A = \{a, b, c\}$
- $L(\mathcal{A}) = A^* abc\, A^*$

- automat niedeterministyczny:



- automat deterministyczny:



Przykład

$L(\mathcal{A}) \;=\;$ liczby podzielne przez 3

- $A \;=\; \{0, 1, \ldots, 9\}$
- $Q \;=\; \{0, 1, 2\}$
- $I \;=\; \{0\}, \;\; F = \{0\}$
- $\delta(q, a) \;=\; (q + a) \mod 3$

$L(\mathcal{A}) \;=\;$ (liczby podzielne przez 3) $- \{\varepsilon\}$

- $Q \;=\; \{0, 1, 2, \text{początek}\}$
- $I \;=\; \{\text{początek}\}$
- $\delta(\text{początek}, a) \;=\; a \mod 3$

Przykład - szachy

Automat $\mathcal{A}$:

- $A =$ wszystkie ruchy w szachach $= A_{\text{białe}} \uplus A_{\text{czarne}}$
- $Q =$ (wszystkie ustawienia figur na planszy szachowej) $\times$ {białe, czarne}
- $I =$ {(ustawienie początkowe, białe)}
- $F =$ {ustawienia szach-mat}
- $\delta((u, \text{białe}), r) = (u', \text{czarne})$ o ile $r \in A_{\text{białe}}$
  $\delta((u, \text{czarne}), r) = (u', \text{białe})$ o ile $r \in A_{\text{czarne}}$ $\qquad u' = \text{wykonaj}(u, r)$

$L(\mathcal{A}) =$ wszystkie rozgrywki szachowe zakończone matem

Plan

Determinizacja?

- Równoważność automatów:

$$L(\mathcal{A}) \;=\; L(\mathcal{A}')$$

- Czy dla każdego automatu skończonego istnieje równoważny automat deterministyczny?

Determinizacja

Twierdzenie

Dla każdego automatu skończonego istnieje równoważny automat deterministyczny.

Dowód:

- $Q' \;:=\; \mathcal{P}(Q)$
- $I' \;:=\; \{I\}$
- $F' \;:=\; \{X \subseteq Q \;:\; X \cap F \neq \emptyset\}$
- $\delta'(X, a) \;:=\; \{\bar{q} \in Q \;:\; \exists q \in X.\ \delta(q, a, \bar{q})\}$

Przez indukcję po długości w pokazujemy:

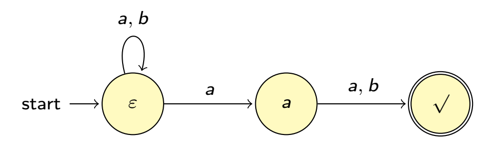
$$\widehat{\delta'}(I, w) \;=\; \{\bar{q} \in Q \;:\; \exists q \in I.\ \widehat{\delta}(q, w, \bar{q})\}$$

Zatem

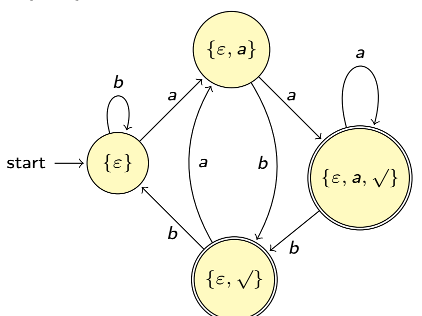
$$w \in L(\mathcal{A}') \iff \widehat{\delta'}(I, w) \in F' \iff \widehat{\delta'}(I, w) \;\cap\; F \neq \emptyset \iff$$
$$\iff \exists q \in I, \bar{q} \in F.\ \widehat{\delta}(q, w, \bar{q}) \iff w \in L(\mathcal{A})$$

Przykład

- $A = \{a, b\}$
- $L = A^* a A$
- automat niedeterministyczny:



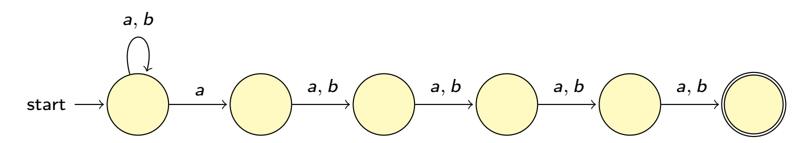
- automat deterministyczny:



Determinizacja jest wykładnicza

- $A \;=\; \{a, b\}$
- $L_n \;=\; A^* a\, A^{n-2} \qquad n \geq 2$

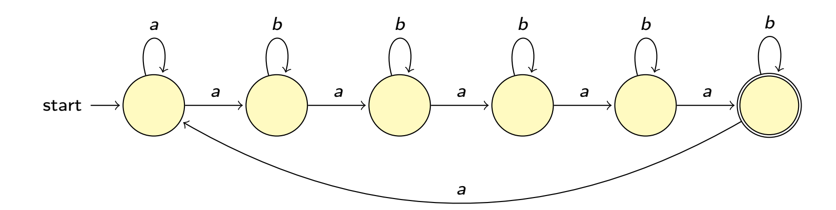
Automat niedeterministyczny:



Pytanie

Ile stanów ma automat deterministyczny?

Determinizacja jest wykładnicza



Pytanie

Ile stanów ma automat deterministyczny?

Plan

Operacje na językach: suma, przecięcie

$$\mathcal{A},\ \mathcal{A}' \ \mapsto\ \mathcal{A}'' \qquad\qquad L(\mathcal{A}'') \ = \ L(\mathcal{A}) \cup L(\mathcal{A}')$$

- $Q'' \ := \ Q \uplus Q'$
- $I'' \ := \ I \uplus I'$
- $F'' \ := \ F \uplus F'$
- $\delta'' \ := \ \delta \uplus \delta'$

$$\mathcal{A},\ \mathcal{A}' \ \mapsto\ \mathcal{A}'' \qquad\qquad L(\mathcal{A}'') \ = \ L(\mathcal{A}) \cap L(\mathcal{A}')$$

- $Q'' \ := \ Q \times Q'$
- $I'' \ := \ I \times I'$
- $F'' \ := \ F \times F'$
- $\delta'' \ := \ \{((q, q'), a, (p, p')) \ : \ (q, a, p) \in \delta,\ (q', a, p') \in \delta'\}$

$$(q, q') \xrightarrow{a}_{\mathcal{A}''} (p, p') \quad \text{wtw. gdy} \quad q \xrightarrow{a}_{\mathcal{A}} p \ \text{ i } \ q' \xrightarrow{a}_{\mathcal{A}'} p'$$

Operacje na językach: dopełnienie

$$\mathcal{A} \mapsto \mathcal{B} \qquad\qquad L(\mathcal{B}) = A^* - L(\mathcal{A})$$

Krok 1: determinizacja

$$\mathcal{A} \mapsto \mathcal{A}'$$

Krok 2: zamiana stanów akceptujących z nieakceptującymi

$$\mathcal{A}' \mapsto \mathcal{B}$$

- $Q_{\mathcal{B}} := Q_{\mathcal{A}'}$
- $I_{\mathcal{B}} := I_{\mathcal{A}'}$
- $F_{\mathcal{B}} := Q_{\mathcal{A}'} - F_{\mathcal{A}'}$
- $\delta_{\mathcal{B}} := \delta_{\mathcal{A}'}$

Operacje na językach: przeplot

$$w \otimes v \;=\; \{u \in A^* \;:\; \exists X \subseteq \{1 \ldots |u|\}.\; u|_X = w, u|_{\{1\ldots|u|\}-X} = v\}$$

Przykład

las $\otimes$ so $=$ {lasso, lsaso, slaso, lasos, lsaos, slaos, lsoas, sloas, solas}

$$L \otimes M \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{w \in L, v \in M} w \otimes v$$

$$\mathcal{A},\ \mathcal{A}' \mapsto \mathcal{A}'' \qquad\qquad L(\mathcal{A}'') = L(\mathcal{A}) \otimes L(\mathcal{A}')$$

- $Q'' := Q \times Q'$
- $I'' := I \times I'$
- $F'' := F \times F'$

$$(q, q') \xrightarrow{a}_{\mathcal{A}''} (p, p') \quad \text{wtw. gdy} \quad \begin{array}{ll} q \xrightarrow{a}_{\mathcal{A}} p \text{ i } q' = p', & \text{albo} \\ q' \xrightarrow{a}_{\mathcal{A}'} p' \text{ i } q = p & \end{array}$$

$$L = (aa + bb + (ab + ba)(aa + bb)^*(ab + ba))^*$$

